Über die kovariante Ableitung der Vektoren.

Von ARTHUR MOÓR in Szeged.

Einleitung.

Der Begriff der kovarianten Ableitung der geometrischen Objekte wurde von J. A. SCHOUTEN eingeführt, und die explizite Form für die geometrischen Objekte erster Klasse mit einer Komponente im eindimensionalen Fall wurde von S. GOŁĄB bestimmt[1]). Dabei gab S. GOŁĄB für den Begriff der kovarianten Ableitung eine etwas allgemeinere Formulierung als J. A. SCHOUTEN.

Wir wollen im folgenden die explizite Form der kovarianten Ableitung der Vektoren im n-dimensionalen Raum unter gewissen weiteren einschränkenden Forderungen (wie z. B. Linearität und Stetigkeit der Funktionen) angeben. Wir werden in dieser Arbeit durchwegs über Vektoren und kovariante Ableitung von Vektoren sprechen, obwohl es sich um Vektorfelder und die Ableitung von Vektorfeldern handelt. Die Definition der kovarianten Ableitung der Vektoren ist nach der entsprechenden Erweiterung der GOŁĄB-schen Formulierung die folgende

Definition. *Die kovariante Ableitung $D_k v^i$ bzw. $D_k w_i$ der kontra- bzw. kovarianten Vektoren v^i, bzw. w_i soll ein Affinor zweiter Stufe $T^i{}_k$ bzw. T_{ik} sein. Die $T^i{}_k$ bzw. T_{ik} sollen Funktionen sein, die*

a) *von den Komponenten v^i, bzw. w_i,*

b) *von den partiellen Ableitungen $\partial_k v^i$, bzw. $\partial_k w_i$,*

c) *von den Übertragungsparametern $A_i{}^j{}_k$ mit der Transformationsformel*

$$A_\alpha{}^\beta{}_\gamma = A_i{}^j{}_k A^i_\alpha A^\beta_j A^k_\gamma + \frac{\partial^2 \xi^r}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\gamma} A^\beta_r, \tag{0. 1}$$

$$A^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^\alpha}, \qquad A^\beta_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi^j} \tag{0. 2}$$

---

[1]) S. GOŁĄB, Über den Begriff der kovarianten Ableitung, *Nieuw Archiv voor Wiskunde* (3) 2 (1954), 90—96.

abhängig sind, und die Funktionen

d) $T^i{}_k$, *bzw.* T_{ik} *sollen in allen ihren Veränderlichen stetig sein.*

In der Gleichung (0. 1) bedeuten die $A_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ bzw. die $A_i{}^j{}_k$ die verschiedenen Komponenten des Übertragungsparameters in dem Koordinatensystem ξ^α bzw. ξ^i. Die verschiedenen Koordinatensysteme werden wir im folgenden durch griechische bzw. lateinische Indizes kennzeichnen. $\alpha, \beta, \ldots, a, b, \ldots$ durchlaufen also die Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

Die Forderung d) kommt bei S. GOŁĄB nicht vor; in manchen Fällen kann sie aber mit großem Nutzen angewandt werden. Aus unserer Definition können wir die explizite Form der kovarianten Ableitung noch nicht eindeutig bestimmen; gewisse Gesetzmäßigkeiten sind aber schon durch sie bestimmt. Für die vollständige Bestimmung der kovarianten Ableitung werden wir noch weitere einschränkende Bedingungen machen.

Über den Übertragungsparametern $A_i{}^j{}_k$ wollen wir bemerken, daß zwischen den bisher bekannten Objekten zweiter Klasse im n-dimensionalen Raum X_n die $A_i{}^j{}_k$ die einfachste Transformationsformel haben.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß zwischen dem kovarianten und dem kontravarianten Fall, falls die Übertragungsparameter symmetrisch sind, ein Unterschied existiert, wie das nach den Sätzen 2 und 3 unmittelbar ersichtlich ist.

§ 1. Die allgemeine kovariante Ableitung.

Die allgemeinen Übertragungsparameter $A_i{}^j{}_k$ können in der Form:

(1. 1) $$A_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + S_i{}^j{}_k$$

geschrieben werden, wo

(1. 1a) $$\Gamma_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(A_i{}^j{}_k + A_k{}^j{}_i), \qquad S_i{}^j{}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(A_i{}^j{}_k - A_k{}^j{}_i)$$

den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil von $A_i{}^j{}_k$ bedeuten. Wenn die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i bestimmt werden soll, so werden wir $A_i{}^j{}_k$ immer in der Form (1. 1) benützen. (Vgl. auch (1.1a).)

Für die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i ist eine Funktion von*

(1. 2) $$\nabla_k v^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k v^i + \Gamma_r{}^i{}_k v^r,$$

von $S_i{}^j{}_k$ und von v^i.

B e w e i s. Nach unserer in der Einleitung angegebenen Definition ist die kovariante Ableitung $T^i_{\ k}$ des kontravarianten Vektors v^i von $\partial_k v^i$, $\varLambda_i{}^j{}_k$ und von v^i abhängig, d. h. es ist

$$D_k v^i \equiv T^i_{\ k}(\partial_a v^b,\ \Gamma_a{}^b{}_c,\ S_a{}^b{}_c, v^a); \tag{1.3}$$

dabei haben wir (1. 1) und (1. 1a) benützt.

Nach einer zulässigen Koordinatentransformation $\xi^\alpha = \xi^\alpha(\xi^i)$ transformieren sich die v^b und die $\partial_a v^b$ nach den Transformationsformeln:

$$v^\beta = A^\beta_s v^s, \tag{1.4'}$$

$$\partial_\alpha v^\beta = A^\beta_t A^s_\alpha \partial_s v^t - B_\alpha{}^\beta{}_\sigma A^\sigma_t v^t, \quad B_\alpha{}^\beta{}_\sigma \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \xi^t}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\sigma} A^\beta_t, \tag{1.4}$$

während die $\Gamma_a{}^b{}_c$ dieselbe Transformationsformel wie die $\varLambda_a{}^b{}_c$ haben. $S_a{}^{}_c$ ist nach (0. 1) und (1. 1a) ein Affinor. Bei der Bestimmung von (1. 4) haben wir die aus (0. 2) folgende Relation

$$A^\beta_t A^t_\alpha = \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{wenn } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{1.5}$$

nach ξ^ϱ differenziert, und (1. 5) nochmals beachtet. Für $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ hat man nach unserer vorigen Bemerkung:

$$\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Gamma_i{}^j{}_k A^i_\alpha A^\beta_j A^k_\gamma + B_\alpha{}^\beta{}_\gamma. \tag{1.6}$$

Beachtet man jetzt, daß wegen des Affinorcharakters von $D_l v^k$ und wegen (1. 3)

$$D_\lambda v^\varkappa = A^\varkappa_r A^s_\lambda D_s v^r, \quad D_\lambda v^\varkappa = T^k_{\ l}(\partial_\alpha v^\beta,\ \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma,\ S_\alpha{}^\beta{}_\gamma,\ v^\alpha)^{2)} \tag{1.7}$$
$$(\varkappa = k,\ \lambda = l)$$

besteht, so folgt auf Grund der Gleichungen (1. 3), (1. 4) und (1. 6) im Hinblick auf den Affinorcharakter von $S_i{}^j{}_k$:

$$\begin{aligned} T^k_{\ l}(A^\alpha_r A^s_\beta \partial_s v^r - B_\beta{}^\alpha{}_\sigma A^\sigma_t v^t,\ \Gamma_r{}^s{}_t A^r_\beta A^\alpha_s A^t_\gamma + B_\beta{}^\alpha{}_\gamma,\ S_r{}^s{}_t A^r_\beta A^\alpha_s A^t_\gamma,\ A^\alpha_t v^t) \equiv \\ \equiv A^\varkappa_t A^s_\lambda T^t_{\ s}(\partial_b v^a,\ \Gamma_b{}^a{}_c,\ S_b{}^a{}_c,\ v^a) \qquad (\varkappa = k,\ \lambda = l). \end{aligned} \tag{1.8}$$

(1. 8) stellt ein Funktionalgleichungssystem für n^2 unbekannte Funktionen $T^k_{\ l}$ von $p = n + n^2 + n^3$ Veränderlichen dar. Die Funktionalgleichungen (1. 8) sollen für die folgenden unabhängigen Veränderlichen erfüllt werden:

$$v^a,\ \partial_b v^a,\ A^r_\alpha,\ B_\beta{}^\alpha{}_\gamma,\ \Gamma_b{}^a{}_c,\ S_b{}^a{}_c.$$

Es ist nämlich immer möglich in einem festen Punkte ξ^i_0 eine Koordinaten-

---

2) Diese Formel drückt aus, daß die Komponenten $T^\varkappa_{\ \lambda}$ dadurch bestimmt werden können, daß man in $T^k_{\ l}$ $\partial_\alpha v^\beta$, $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$, $S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ und v^α substituiert.

transformation $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(\xi')$ (mit $\mathrm{Det}(A^{r}_{\alpha}) \neq 0$) zu wählen, bei welcher die A^{r}_{α} und die $B_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}$ vom vornherein gegeben sind.

Wenn wir nun in (1.8)

$$(1.8') \qquad A^{\alpha}_{t} = \delta^{a}_{t}, \quad B_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma} = -\Gamma_{b}{}^{a}{}_{c} \qquad (\alpha = a, \ \beta = b, \ \gamma = c)$$

setzen, so bekommt man nach (1.5), daß auch $A^{t}_{\beta} = \delta^{t}_{b}$, $(\beta = b)$ besteht, und

$$(1.9) \qquad T^{k}{}_{l} = T^{k}{}_{l}\,(\nabla_{b} v^{a}, 0, S_{b}{}^{a}{}_{c}, v^{a})$$

ist, wo $\nabla_{b} v^{a}$ durch (1.2) bestimmt ist. Das beweist eben den Satz 1.

Die kovariante Ableitung der kovarianten Vektoren kann in analoger Weise behandelt werden. Beachten wir die Transformationsformeln von w_{b} und $\partial_{a} w_{b}$, so bekommen wir statt der charakteristischen Funktionalgleichung (1.8) im kovarianten Fall:

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} &\overset{\prime}{T}_{kl}\,(A^{s}_{\alpha} A^{r}_{\beta}\, \partial_{s} w_{r} + A^{t}_{\varrho} B_{\alpha}{}^{\varrho}{}_{\beta} w_{t}, \ \Gamma_{r}{}^{s}{}_{t} A^{r}_{\alpha} A^{\gamma}_{s} A^{t}_{\beta} + B_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}, \ S_{r}{}^{s}{}_{t} A^{r}_{\alpha} A^{\gamma}_{s} A^{t}_{\beta}, \ A^{t}_{\alpha} w_{t}) \equiv \\ &\equiv A^{t}_{\varkappa} A^{s}_{\lambda}\, T_{ts}\,(\partial_{a} w_{b}, \ \Gamma_{a}{}^{c}{}_{b}, \ S_{a}{}^{c}{}_{b}, \ w_{a}) \qquad (\varkappa = k, \ \lambda = l). \end{aligned}$$

Nach der Substitution (1.8′) bekommt man das Analogon des Satzes 1 für kovariante Vektoren, doch bedeutet jetzt $\nabla_{k} w_{i}$ die Formel:

$$(1.11) \qquad \nabla_{k} w_{i} \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_{k} w_{i} - \Gamma_{i}{}^{s}{}_{k} w_{s}.$$

Wir haben also den

Satz 2. *Die kovariante Ableitung der kovarianten Vektoren ist eine Funktion von* $\nabla_{k} w_{i}$, *von* $S_{i}{}^{j}{}_{k}$ *und von* w_{i}.

Die Formeln (1.2) und (1.11) sind übrigens auch selbst kovariante Ableitungen von Vektoren, die Übertragungsparameter $\Gamma_{i}{}^{j}{}_{k}$ sind aber in diesem Falle in den unteren Indexen symmetrisch.

§ 2. Symmetrische Übertragungsparameter.

In diesem Paragraphen wollen wir annehmen, daß *die* $A_{i}{}^{j}{}_{k}$ *in den Indizen* i, k *symmetrisch sind,* d. h. nach (1.1):

$$(2.1) \qquad A_{i}{}^{j}{}_{k} = \Gamma_{i}{}^{j}{}_{k}, \quad S_{i}{}^{j}{}_{k} = 0$$

besteht.

Für die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^{i} beweisen wir den folgenden

Satz 3. *Die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors* v^{i} *ist eine Funktion von*

$$(2.2) \qquad \nabla_{k} v^{i} \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_{k} v^{i} + \Gamma_{t}{}^{i}{}_{k} v^{t},$$

falls (2.1) *besteht.*

Beweis. Nach dem Satz 1 und nach (2. 1) ist die kovariante Ableitung $T^k{}_l$ von v^a von der Form:

$$D_l v^k \equiv T^k{}_l \, (\nabla_a v^b, v^a).$$

Um den vollständigen Beweis des Satzes 3 zu vollbringen, müssen wir somit zeigen, daß $T^k{}_l$ von v^a nicht in expliziter Weise, sondern nur durch $\nabla_b v^a$ abhängt. Beachtet man (2. 1), so bekommt man statt des Funktionalgleichungssystems (1. 8)

$$(2.3) \qquad T^k{}_l (A^a_t A^s_\beta \nabla_s v^t, \; A^a_t v^t) = A^\varkappa_t A^s_\lambda T^t{}_s \, (\nabla_b v^a, v^a) \qquad (\varkappa = k, \lambda = l).$$

Setzen wir jetzt in dieses Funktionalgleichungssystem den Wert

$$A^t_\alpha = \varrho^{-1} \delta^t_a \qquad (a = \alpha)$$

ein, so folgt nach (1. 5), daß

$$A^\beta_t = \varrho \, \delta^b_t \qquad (b = \beta)$$

ist, und aus (2. 3) bekommt man

$$(2.4) \qquad T^k{}_l (\nabla_b v^a, \varrho v^a) = T^k{}_l \, (\nabla_b v^a, v^a).$$

Diese Formel drückt aus, daß die Funktion $T^k{}_l \, (\nabla_b v^a, v^a)$ in den Veränderlichen v^a homogen von nullter Dimension ist.

Nach unserer Forderung d) (vgl. die Einleitung) muß $T^k{}_l$ in v^a stetig sein. Die Richtigkeit des folgenden Lemmas ist aber fast trivial:

Lemma. *Ist eine in den Veränderlichen ξ^a stetige Funktion $F(\xi^a)$ homogen von nullter Dimension, so ist sie eine Konstante.*

Wegen der Homogenität von nullter Dimension ist nämlich

$$F(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) = F(\varrho \xi^1, \varrho \xi^2, \ldots, \varrho \xi^n),$$

und aus $\varrho \to 0$ folgt schon das Lemma.

Auf Grund dieses Lemmas folgt schon die Richtigkeit des Satzes 3, da nach (2. 4) $T^k{}_l$ in den v^a homogen von nullter Dimension, und somit nach der Forderung d) von v^a unabhängig ist.

Die kovariante Ableitung von v^i hat also die Form:

$$D_k v^i \equiv T^i{}_k (\nabla_b v^a \, .$$

Unsere Definition, die wir für die kovariante Ableitung in der Einleitung angegeben haben, ist hinreichend für die Gültigkeit des Satzes 3, da wir bei dem Beweis nur die in der Definition formulierten Eigenschaften der kovarianten Ableitung benutzt haben. $T^i{}_j$ kann aber noch mannigfache Formen haben. Wir geben einige Beispiele:

$$T^i{}_j = \nabla_j v^i, \quad T^i{}_j = \nabla_r v^i \nabla_j v^r, \quad T^i{}_j = \nabla_r v^i \nabla_s v^r \nabla_j v^s.$$

Wenn

$$\nabla_r v^i t^r_j = \delta^i_j$$

ist, so kann z. B. auch

$$T^i_j = t^i_j, \quad T^i_j = t^i_r t^r_j, \quad T^i_j = t^i_r t^r_s t^s_j$$

gesetzt werden.

Eine wichtige Eigenschaft von T^k_m kann aber leicht bestimmt werden. Die Transformationsformel von T^k_m ist nämlich:

$$T^k_m\,(A^\alpha_r A^s_\beta \nabla_s v^r) = A^\varkappa_r A^s_\mu T^r_s\,(\nabla_b v^a) \qquad (\varkappa = k,\ \mu = m).$$

Nach der Substitution $A^\alpha_r = \varrho_{(r)}\delta^a_r$ [3] $(a = \alpha)$ folgt nach (1.5) $A^t_\beta = \overset{-1}{\varrho_{(b)}}\delta^t_b$ $(b = \beta)$, und somit wird

$$T^k_m(\varrho_{(a)}\overset{-1}{\varrho_{(b)}}\nabla_b v^a) = \varrho_{(k)}\overset{-1}{\varrho_{(m)}}\,T^k_m\,(\nabla_b v^a)$$

(nicht summieren auf a, b, k, m).

Wir wollen jetzt den kovarianten Fall untersuchen, d. h. die kovariante Ableitung der kovarianten Vektoren bestimmen, falls die Bedingungen (2. 1) gültig sind. Am Ende des ersten Paragraphen haben wir bewiesen, daß die kovariante Ableitung T_{ik} der kovarianten Vektoren, falls (2. 1) besteht, die Form

$$D_k w_i \equiv T_{ik}\,(\nabla_a w_b,\, w_a) \tag{2. 5}$$

haben muß, wo $\nabla_a w_b$ durch (1. 11) bestimmt ist.

Die Formel (2. 5) beweist den folgenden

Satz 4. *Die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors ist eine Funktion von* $\nabla_a w_b$ *und* w_a, *falls* (2. 1) *besteht.*

Im kontravarianten Fall konnte man wegen der Stetigkeit beweisen, daß die kovariante Ableitung von v^i nur mittels $\nabla_a v^b$ abhängig sein kann. Im kovarianten Fall ist aber der entsprechende Satz nicht gültig, d. h. Satz 4 kann in dieser Richtung nicht verbessert werden.

Wir werden durch ein Beispiel zeigen, daß in der Formel der kovarianten Ableitung von w_i die Größen $\nabla_b w_a$ und w_a in expliziter Weise vorkommen können.

Die Formel

$$T_{ik} = \nabla_i w_k - w_i w_k$$

bestimmt eine kovariante Ableitung von w_i, die die Definition befriedigt, und auch von w_a in expliziter Weise abhängt.

Beschränken wir uns auf diejenigen kovarianten Ableitungen von w_i, die allein von $\nabla_k w_i$ abhängig sind, so kann die allgemeinste Form von T_{ik}

---

[3]) Bei den Substitutionen von dieser Form soll jetzt und im folgenden auf die unteren Indizes *nicht summiert* werden.

bestimmt werden. $\nabla_k w_i$ ist nämlich ein Affinor (Tensor) zweiter Stufe, und die allgemeinste Form von T_{ik} kann mit der Methode von M. IKEDA und S. ABE bestimmt werden[4]). Wenn T_{ik} in i, k symmetrisch sein soll, so ist:

$$D_i w_k \equiv T_{ik} = c \nabla_i w_k, \qquad c: \textit{Skalar}.$$

§ 3. Die lineare kovariante Ableitung.

Für die kovariante Ableitung haben wir in der Einleitung die Forderungen a)—d) gestellt. Zu diesen wollen wir noch die folgende Forderung hinzufügen:

e) *Die kovariante Ableitung eines Vektors v^i bzw. w_i soll in $\partial_k v^i$ und v^i, bzw. in $\partial_k w_i$ und w_i homogen linear sein.*

Aus der Formel (1.9) folgt dann wegen der Forderung e) für $T^i{}_j$ die Form:

(3.1) $$D_j v^i \equiv T^i{}_j = a_t{}^i{}_j{}^s (S_a{}^b{}_c) \nabla_s v^t + b_t{}^i{}_j (S_a{}^b{}_c) v^t,$$

wo $a_t{}^i{}_j{}^s$ und $b_t{}^i{}_j$ aus $S_a{}^b{}_c$ gebildete Affinoren sind.

Wir werden jetzt beweisen, daß *der Affinor $a_t{}^i{}_j{}^s$ in der Formel* (3.1) *die folgende Form hat:*

(3.2) $$a_r{}^i{}_j{}^s = c_1 \delta^i_r \delta^s_j + c_2 \delta^i_j \delta^s_r, \qquad c_\varrho: \textit{Skalar}, \ \varrho = 1, 2.$$

Da nach der Transformationsformel (0.1) und wegen (1.1a) $S_a{}^b{}_c$ ein Affinor ist, und nach (3.1) $a_t{}^i{}_j{}^s$ einen Affinor bedeutet, besteht

(3.3) $$a_t{}^k{}_l{}^s (S_\alpha{}^\beta{}_\gamma) = a_h{}^p{}_j{}^r (S_a{}^b{}_c) A^\varkappa_p A^h_\tau A^\sigma_r A^j_\lambda$$
$$(\varkappa = k, \ \lambda = l, \ \tau = t, \ \sigma = s)$$

mit

(3.3a) $$S_\alpha{}^\beta{}_\gamma = S_i{}^k{}_j A^i_\alpha A^\beta_k A^j_\gamma.$$

Man bekommt nämlich die Komponenten $a_\varrho{}^\varkappa{}_\lambda{}^\sigma$, indem man in $a_r{}^k{}_l{}^s$ statt $S_a{}^b{}_c$ die Größen $S_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ substituiert. Wenn wir in (3.3) und (3.3a) $A^\alpha_t = \varrho \delta^\sigma_t$ $(t = \tau)$ substituieren, so wird wegen (1.5) $A^\alpha_s = \varrho^{-1} \delta^\alpha_s$ $(a = \alpha)$ und aus (3.3) wird:

$$a_t{}^k{}_l{}^s (\varrho S_a{}^b{}_c) = a_t{}^k{}_l{}^s (S_a{}^b{}_c).$$

Diese Gleichung drückt aus, daß $a_t{}^k{}_l{}^s$ in seinen Veränderlichen homogen von nullter Dimension ist. Wegen der Stetigkeit folgt aber dann nach unserem Lemma (§ 2), daß die $a_t{}^i{}_j{}^s$ Skalaren sind, d. h. $a_\gamma{}^\alpha{}_\delta{}^\beta = a_c{}^a{}_d{}^b$ wenn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\delta = d$ ist.

[4]) MINEO IKEDA und SHINGO ABE, On tensorial concomitants of a non-symmetric tensor $g_{\gamma\nu}$. I, *Tensor,* new series, 7 (1957), 59—69. Für den symmetrischen Fall vgl. A. MOÓR, Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind, *Publicationes Math. Debrecen,* 6. (Vor Erscheinung.)

Aus (3. 3) bekommt man somit nach einer Kontraktion mit $A^i_\varkappa A^m_\sigma$:

$$a^{\varkappa\sigma}_{t\,\lambda} A^i_\varkappa A^m_\sigma = a^{i\,m}_{s\,t} A^s_\tau A^t_\lambda . \tag{3.4}$$

Wählt man jetzt für A^t_μ

$$A^t_\mu = \varrho_{(\mu)} \delta^t_\mu \qquad \text{(nicht summieren auf } \mu), \tag{3.5}$$

so bekommt man aus (3. 4)

$$\varrho_{(k)}\varrho_{(m)} a^{k\,m}_{\tau\,\lambda} = \varrho_{(\tau)}\varrho_{(\lambda)} a^{k\,m}_{\tau\,\lambda} \qquad \text{(nicht summieren auf } k, m, \tau, \lambda). \tag{3.6}$$

Da die $\varrho_{(i)}$ von einander unabhängig sind, folgt aus unserer letzten Gleichung, daß $a^{k\,m}_{t\,\lambda}$ die Form:

$$a^{k\,m}_{t\,l} = \underset{(1)}{c}{}^{k\,m}_{t\,l}\, \delta^k_t \delta^m_l + \underset{(2)}{c}{}^{k\,m}_{t\,l}\, \delta^k_l \delta^m_t \qquad \text{(nicht summieren auf } k, m, t, l) \tag{3.7}$$

haben muß, wo die $\underset{(\varrho)}{c}{}^{k\,m}_{t\,l}$ Skalaren bedeuten. Offenbar befriedigt (3. 7) die Gleichung (3. 6), da jetzt die griechischen und die lateinischen Indizes dieselben Komponenten bezeichnen, denn die $a^{k\,m}_{t\,l}$ und die $\underset{(\varrho)}{c}{}^{k\,m}_{t\,l}$ Skalaren sind.

Substituieren wir nun die Formel (3. 7) in (3. 4), so bekommen wir:

$$\underset{(1)}{c}{}^{\tau\,\lambda}_{\tau\,\lambda} A^i_\tau A^m_\lambda + \underset{(2)}{c}{}^{\lambda\,\tau}_{\tau\,\lambda} A^i_\lambda A^m_\tau = \underset{(1)}{c}{}^{i\,m}_{i\,m} A^i_\tau A^m_\lambda + \underset{(2)}{c}{}^{i\,m}_{m\,i} A^i_\lambda A^m_\tau$$

(nicht summieren auf τ, λ, i, m).

Da die Veränderlichen A^i_τ beliebig sind, folgt aus unserer letzten Formel, daß

$$\underset{(1)}{c}{}^{\tau\,\lambda}_{\tau\,\lambda} = \underset{(1)}{c}{}^{i\,m}_{i\,m} = c_1, \qquad \underset{(2)}{c}{}^{\lambda\,\tau}_{\tau\,\lambda} = \underset{(2)}{c}{}^{i\,m}_{m\,i} = c_2$$

(nicht summieren auf τ, λ, i, m)

bestehen. Auf Grund von (3. 7) beweisen aber diese Formeln eben die Relation (3. 2).

Auf Grund der Formeln (3. 1) und (3. 2) besteht der folgende

S a t z 5. *Die lineare kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i ist immer von der Gestalt*

$$D_k v^i = c_1 \nabla_k v^i + c_2 \delta^i_k \nabla_t v^t + b_t{}^i{}_k (S_a{}^b{}_c) v^t, \tag{3.8}$$

wo c_1 und c_2 Skalaren sind, und $b_t{}^i{}_k$ ein Affinor dritter Stufe ist.

Der Affinor $b_r{}^i{}_j$ ist nicht eindeutig bestimmt, denn aus dem Affinor $S_a{}^b{}_c$ können mehrere Affinoren vom Typ $b_r{}^i{}_j$ gebildet werden. Z. B.

$$b_r{}^i{}_j = S_r{}^i{}_j, \qquad b_r{}^i{}_j = g_{rj} S_k{}^k{}_t g^{ti},$$

wo

$$g_{rj} \overset{\text{def}}{=} S_m{}^m{}_t S_r{}^t{}_j, \qquad g_{rs} g^{sj} = \delta^j_r$$

bedeutet.

Im kovarianten Fall bekommt man in analoger Weise aus der entsprechenden Forderung e), daß die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors w_i die Form:

$$D_k w_i = a_{i\ k}^{\ r\ s} \nabla_r w_s + b_i{}^r{}_k (S_a{}^b{}_c) w_r$$

hat. Nach (3.2) wird:

$$D_k w_i = c_1 \nabla_k w_i + c_2 \nabla_i w_k + b_i{}^r{}_k (S_a{}^b{}_c) w_r, \tag{3.9}$$

wo $\nabla_k w_i$ durch (1.11) bestimmt ist. Dieses Resultat kann man im folgenden Satz zusammenfassen:

S a t z 6. *Die lineare kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors ist immer von der Form* (3.9), *wo* c_1, c_2 *Skalaren sind, und* $b_i{}^r{}_k$ *ein Affinor dritter Stufe ist.*

Ist $S_i{}^j{}_k = 0$, d. h. sind die Übertragungsparameter symmetrisch, so kann die Beweisführung der Sätze 5 und 6 nicht unmittelbar angewandt werden, da in diesem Fall (3.3) nicht bestehen wird. Aus der Forderung e) folgt nach dem Satz 3, daß

$$T^i{}_k = c_{k\ s}^{\ i\ t} \nabla_t v^s \tag{3.10}$$

besteht, wenn $T^i{}_k \equiv D_k v^i$ die kovariante Ableitung von v^i bedeutet; die $c_{k\ s}^{\ i\ t}$ sind Skalaren, es ist also in zwei verschiedenen Koordinatensystemen:

$$c_{\gamma\ \delta}^{\ \alpha\ \beta} = c_{c\ d}^{\ a\ b}, \qquad (\alpha = a,\ \beta = b,\ \gamma = c,\ \delta = d). \tag{3.11}$$

Da $T^i{}_k$ ein Affinor ist, besteht die Relation:

$$T^\iota{}_\varkappa = A^\iota_a A^b_\varkappa T^a{}_b.$$

Nach (3.10) ist $T^\iota{}_\varkappa = c_{\varkappa\sigma}^{\iota\mu} \nabla_\mu v^\sigma$, d. h.

$$c_{\varkappa\ \sigma}^{\ \iota\ \mu} A^\sigma_s A^m_\mu \nabla_m v^s = A^\iota_a A^b_\varkappa c_{b\ s}^{\ a\ m} \nabla_m v^s,$$

da die c:: Skalaren sind. Setzen wir jetzt $A^t_\varkappa = \varrho_{(k)} \delta^t_k$ $(k = \varkappa)$ und beachten dann (3.11), so bekommen wir wegen $A^\varkappa_t = \varrho^{-1}_{(t)} \delta^k_t$ $(k = \varkappa)$:

$$c_{k\ s}^{\ i\ m} \nabla_m v^s \varrho_{(m)} \varrho^{-1}_{(s)} = c_{k\ s}^{\ i\ m} \nabla_m v^s \varrho^{-1}_{(i)} \varrho_{(k)}$$

(nicht summieren auf m, s, i, k).

Da diese Gleichung in den $\varrho_{(t)}$ und $\nabla_m v^s$ eine Identität sein muß, hat man

$$c_{k\ s}^{\ i\ m} = c_1 \delta^i_s \delta^m_k + c_2 \delta^i_k \delta^m_s. \tag{3.12}$$

Substituiert man diese Formel in (3.10), so bekommt man den folgenden

Satz 7. *Die allgemeinste Form der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektors v^i, die die Bedingungen* a)—e) *erfüllt, ist:*

$$D_k v^i \equiv T^i_{\ k} = c_1 \nabla_k v^i + c_2 \delta^i_k \nabla_t v^t,$$

wo die c_1, c_2 beliebige Skalaren bedeuten[5]).

Für die kovarianten Vektoren kann man in ganz ähnlicher Weise verfahren. Aus der Forderung der Homogenität und Linearität folgt:

$$D_m w_k \equiv T_{km} = c_k{}^t{}_m{}^s \nabla_t w_s, \tag{3.13}$$

wo die $c_k{}^t{}_m{}^s$ wieder Skalaren bedeuten. In w_t lineare Glieder können in der Formel von T_{km} nicht vorkommen. Wäre nämlich ein Glied $d_m{}^r{}_k w_r$ in (3.13) vorhanden, wo die $d_i{}^r{}_j(x)$ Skalaren sind, so würde man nach einer Koordinatentransformation die Formel

$$d_\varkappa{}^\varrho{}_\mu w_\varrho = A^a_\varkappa A^b_\mu d_a{}^r{}_b w_r \tag{3.14}$$

bekommen. Beachtet man jetzt, daß

$$d_\varkappa{}^\varrho{}_\mu = d_k{}^r{}_m, \qquad w_\varrho = A^t_\varrho w_t \qquad (\varkappa = k,\ \varrho = r,\ \mu = m)$$

besteht, so bekommt man aus (3. 14):

$$d_k{}^\varrho{}_m A^t_\varrho w_t = A^a_\varkappa A^b_\mu d_a{}^r{}_b w_r \qquad (\varkappa = k,\ \mu = m).$$

Das ist aber nur im Fall $d_k{}^r{}_m \equiv 0$ möglich, da die linke Seite in den A^t_ϱ linear, während die rechte Seite quadratisch ist. Die Transformationsformel der rein kovarianten Affinoren gibt aus (3. 13):

$$c_\varkappa{}^\tau{}_\mu{}^\sigma A^a_\tau A^b_\sigma \nabla_a w_b = A^a_\varkappa A^b_\mu c_a{}^t{}_b{}^s \nabla_t w_s.$$

Nach einer Substitution $A^k_\tau = \varrho_{(t)} \delta^k_t$ $(t = \tau)$ bekommt man ebenso wie im kontravarianten Fall die Relation (3. 12). Setzen wir das in (3. 13), so bekommen wir den

Satz 8. *Die allgemeinste Form der kovarianten Ableitung eines kovarianten Vektors w_i, die die Bedingungen* a)—e) *erfüllt, ist:*

$$D_m w_k \equiv T_{km} = c_1 \nabla_m w_k + c_2 \nabla_k w_m,$$

wo die c_1, c_2 beliebige Skalaren bedeuten.

(Eingegangen am 27. Mai 1958.)

---

[5]) $\triangle_t v^t$ ist ein Skalar, der von $\partial_k v^i$ und v^i abhängig ist; c_1, c_2 bedeuten solche Skalaren, die nur von den x^i abhängig sind.